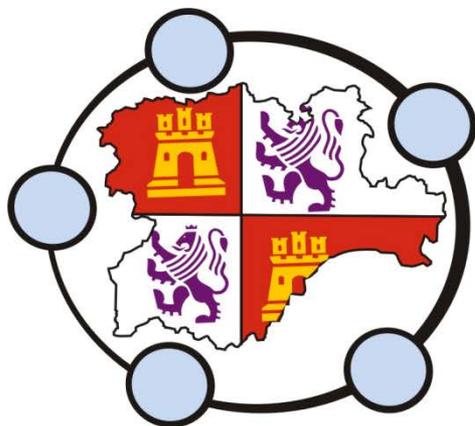


GeoGebra CAS

Cálculo simbólico.



I JORNADA GEOGEBRA CASTILLA Y LEÓN

SORIA, 5 de Abril de 2014



Instituto
Geogebra
Cantabria



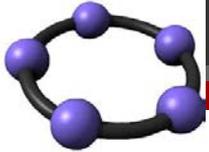
Junta de
Castilla y León



Asociación
Castellana y Leonesa de
Educación Matemática
Miguel de Guzmán

Jose M. Arranz San José
Asociación Castellana y Leonesa de
Educación Matemática "Miguel de Guzmán".

GeoGebra CAS

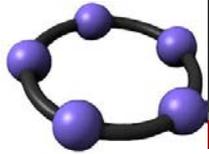


- ➔ Disponible desde la versión 4.2.
- ➔ Algunos cambios en versión actual 4.4.
- ➔ Se accede seleccionando vista CAS:

Ctrl + Shift+ K

Apariencias	
	Álgebra y Gráficos
	Geometría Básica
	Geometría
	Hoja de Cálculo y Gráficos
	CAS y Gráficos

Vista	
	Vista Algebraica ⌘A
	Hoja de Cálculo ⌘S
	CAS-Cálculo Simbólico ⌘K
	Vista Gráfica ⌘1
	Vista Gráfica 2 ⌘2
	Protocolo de Construcción ⌘L
	Teclado
	Campo de entrada
	Disposición ...
	Actualización de vistas (Limpia rastros) ⌘F
	Recálculo total ⌘R



Vista CAS: Barra de herramientas propia



 Evalúa

 Valor Numérico

 Conserva entrada

 Factoriza

 Desarrolla

 Sustituye

 Resuelve

 Resolución numérica

 Derivada

 Integral

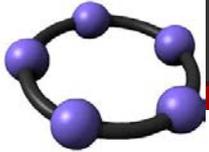
  Cálculo de probabilidades

 Inspección de funciones

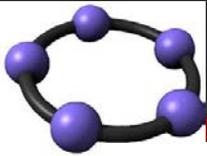
 Elimina

Un menú muy simple con muchas posibilidades.

Algunos cálculos que permite GeoGebra CAS



- Operaciones con números naturales, enteros, racionales, irracionales, complejos.
- Factorizar, MCD y mcm de números y polinomios.
- Progresiones, combinatoria.
- Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
- Geometría analítica.
- Cálculo de límites, derivadas e integrales.
- Operaciones con vectores y matrices.
- Probabilidad y estadística.
- ... y mucho más.



Nociones previas

- La Información se organiza en filas.
- Cada fila formada por línea de entrada y línea de salida.

CAS-Cálculo Simbólico

1 2+3
→ 5

2 (a+b)(a-b)
→ a² - b²

Línea de Entrada

Línea de Salida

Teclas de escritura rápida. Atajos de edición En una línea en blanco	
=	Copia Entrada anterior
Barra espaciadora	Copia Salida anterior
)	Copia salida anterior ()

**Muestra representación
en vista gráfica.**

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica Cálculo Simbólico (CAS) Vista Gráfica

Función

f(x) = x² + 3

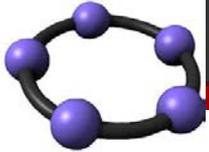
1 f(x) := x² + 3
→ f(x) := x² + 3

2

f

8
6
4

Primeras operaciones



AS-Cálculo Simbólico

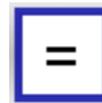
$$2+3-4+5$$

$$2.1-3.2/4.6$$

$$\rightarrow \frac{323}{230}$$

$$1+1/(1+1/(1+1/(1)))$$

$$\checkmark 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$$



Evalúa. Valor exacto.



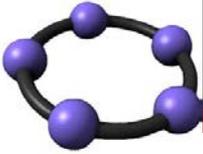
Valor Numérico. Cálculo aprox.

	Operaciones
Suma	+
Resta	-
Producto	* espacio
División	/
Elevado a	^
Separador decimal	.

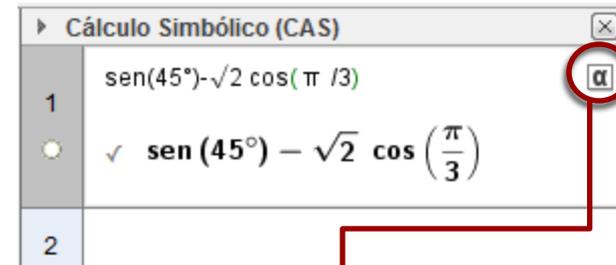


Se comprueba que se ha introducido bien la expresión.

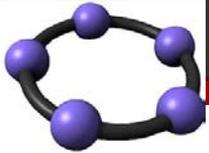
Números y símbolos frecuentes



		Windows	Mac
Raíz cuad.	sqrt()	Alt + r	Ctrl + r
π	pi	Alt + P	Ctrl + P
e		Alt + e	Ctrl + e
i	sqrt(-1)	Alt + i	Ctrl + i
Infinito ∞		Alt + u	Ctrl + u
° sexagesimal		Alt + o	Ctrl + o



Referencias entre filas



Referencias Estáticas #		Referencias Dinámicas \$
#	Salida Previa	\$
#n	Salida fila n	\$n
##	Entrada Previa	\$\$
##n	Entrada fila n	\$\$n
Clic (botón Izq.)	Salida fila n	Alt + Clic Izq.

Referencia Estática

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	3+4(2+5)
○	→ 31
2	#

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	3+4(2+6)
○	→ 35
2	31
○	→ 31

Clic fila n

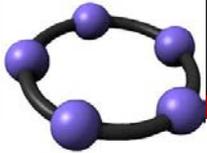
Referencia Dinámica \$

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	3+4(2+5)
○	→ 31
2	\$1

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	3+4(2+6)
○	→ 35
2	\$1
○	→ 35

Alt + Clic fila n

MCD, MCM, primos,...



Factoriza

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	8512 Factoriza: $2^6 \cdot 7 \cdot 19$
2	Factoriza[8512] → $2^6 \cdot 7 \cdot 19$
3	Factoriza[324] → $2^2 \cdot 3^4$
4	a:=8512 → a := 8512
5	b:=324 → b := 324
6	MCD[a,b] → 4

$$\frac{15}{3 \cdot 5}$$

Factoriza[n] (n)

↗ MCD[m ,n] MCD[{a,b,c,...}]

↗ MCM[m, n] MCM[{a,b,c,...}]

↗ Es Primo[n] (n) → true, false

↗ PrimoAnterior[] PrimoSiguiente[]

↗ Divisores[n] ListaDivisores[]

↗ Suma Divisores[n]

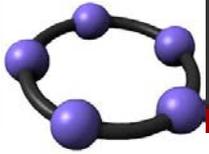
↗ División[D , d] → cociente, resto

↗ Cociente[D ,d] → cociente

↗ Resto[D , d] → resto

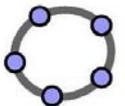
Factoriza, MCD, MCM, Cociente,.... Válidos también para expresiones (polinomios)

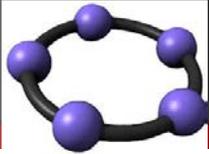
Ejercicios números primos,...



- Determina los números primos entre 1 y 100.
- ¿Qué números entre 1 y 100 tienen un número impar de divisores? ¿Y exactamente tres divisores?
- Calcula los diez primeros primos de la forma $2^n - 1$. Primos de Mersenne.
- ¿Cuál es el número con más divisores entre 1 y 100?
- Determina los números perfectos entre 1 y 100.
(Un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores excluido el propio número).

Estos ejercicios se simplifican utilizando un deslizador en la vista gráfica.





Potencias, radicales y logaritmos

15
3 · 5

()

$\sqrt{\quad}$

x =

x ≈

∂

×

► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $\sqrt{245}$

○ Desarrolla: $7\sqrt{5}$

2 raizn(224,5)

○ $\rightarrow 2\sqrt[7]{7}$

3 $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}))})}$

○ $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$

4 $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}))})}$

○ Desarrolla: $\sqrt{2}\sqrt[4]{8}$

15
3 · 5

()

$\sqrt{\quad}$

x =

x ≈

∂

×

► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $\log(2, 1024)$

○ $\rightarrow \frac{\ln(1024)}{\ln(2)}$

2 $\log_2(1024)$

○ ≈ 10

3 $\log(2, \sqrt{8})$

○ $\rightarrow \frac{\ln(2\sqrt{2})}{\ln(2)}$

4 $\log(2, \sqrt{8})$

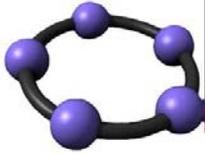
○ ≈ 1.5

Potencias, raíces	
Elevado a	\wedge
Raíz Cuadrada	Sqrt() Alt + r
Raíz Cúbica	Cbrt()
Raíz índice n	raizn(a)

logaritmos	
Logaritmo neperiano	Log() ln()
Logaritmo decimal	Log10()
Logaritmo base 2	Log2()
Logaritmo en base b	Log[b,a]

Por supuesto, ecuaciones con radicales, exponenciales y logarítmicas.

Polinomios



► Cálculo Simbólico (CAS)

1	$P(x) := x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
○	$\rightarrow P(x) := x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
2	$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
○	Factoriza: $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 1)$
3	P
○	Factoriza: $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 1)$
4	Factores[P]
○	$\rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ x + 3 & 1 \\ x^2 + 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	Raíz[P]
○	$\rightarrow \{x = -3, x = 1\}$
6	RaízCompleja[P]
○	$\rightarrow \{1, -3, -i, i\}$



Factoriza



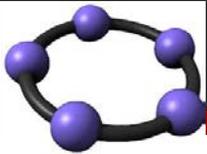
Desarrolla



Sustituye

Polinomios	
P(x):=	Q(x):=
Factoriza[P(x)]	Raíces o factores complejos
Factores[P(x)]	FactorC[P(x)]
Raíz[P(x)]	RaízCompleja[P(x)]
MCD [P(x),Q(x)]	MCD[{p(x),Q(x),...}]
MCD [P(x),Q(x)]	MCM[{p(x),Q(x),...}]
División[P(x),Q(x)]	→ {cociente, resto}
Cociente[P(x),Q(x)]	→cociente
Resto[P(x),Q(x)]	→resto

Ecuaciones e inecuaciones



► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $4(x-2)(x-1)+3(x^2-1)=9$
○ Resuelve: $\left\{x = -\frac{2}{7}, x = 2\right\}$

2 $\text{sqrt}(x+1)+\sqrt{(7x-4)}=-3$
○ $\sqrt{x+1} + \sqrt{7x-4} = -3$

3 Resuelve[$t^2-5t+6=0$]
○ $\rightarrow \{t = 2, t = 3\}$

Ecuaciones, inecuaciones, sistemas		
Resuelve[ecuación] Soluciones[ecuación] Raíz[ecuación]		Solución exacta, si la hay, de una ecuación
SolucionesN ResoluciónN		Soluciones numéricas o aproximadas
SolucionesC ResoluciónC		Soluciones complejas
Resuelve[ecuación, variable] ResoluciónN[ecuación, variable, punto Inicial]		Si hay más de una variable

► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $\text{lista1}:=\text{Resuelve}[2x + 1 < 8]$
○ $\rightarrow \text{lista1} := \left\{\frac{7}{2} > x\right\}$

► Vista Gráfica

(0.36, 21.44)

Para resolver sistemas también matrices.

Ecuaciones paso a paso

▶ Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$2x+1=7$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2x + 1 = 7$
2	$(2x + 1 = 7) - 1$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2x = 6$
3	$(2x = 6) / 2$
<input type="radio"/>	$\rightarrow x = 3$

➔ De forma sencilla, podemos mostrar los pasos en la resolución de una ecuación.

➔ Podemos utilizar este procedimiento en otras situaciones.



Sistemas de ecuaciones

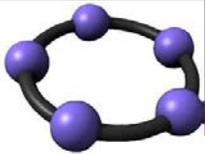
➔ Los mismos comandos que para resolver ecuaciones.

▶ Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$\{4x-3y=23, 2x+5y=-21\}$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 2, y = -5\}$
2	$\{x y = 12, x^2 + y^2 = 25\}$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 3, y = 4\}, \{x =$
3	$\{2 \log_{10}(x) + \log_{10}(y) = 2, \log_{10}(x y) = 1\}$
<input type="radio"/>	ResoluciónN: $\{x = 10, y = 1\}$

Sistemas de Ecuaciones
$\{\text{ecuación}_1, \text{ecuación}_2, \dots\}$
Soluciones $\{\{ec_1, ec_2, \dots\}, \{x, y, z, \dots\}\}$
Resuelve $\{\{ec_1, ec_2, \dots\}, \{x, y, z, \dots\}\}$

Para resolver sistemas lineales es muy cómodo utilizar matrices.

Números complejos

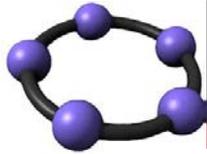


Cálculo Simbólico (CAS)	
1	Sqrt(-1)
○	→ i
2	$z=2+3i$
	→ $z := 2 + 3i$
3	abs(z)
○	→ $\sqrt{13}$
4	arg(z)
○	→ $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$
5	APolar[z]
○	→ $\left(\sqrt{13}; \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

Números complejos	
Unidad imaginaria i	Sqrt(-1), alt + i
$z := a + bi$	
Modulo de z	abs(z)
Argumento de z	arg(z)
Conjugado de z	Conjugate(z)
Parte real	Real(z)
Parte imaginaria	Imaginaria(z)
Binómica → polar	Apolar(z)
Polar → binomica	Acomplejo(mód, arg)

Ecuaciones, polinomios,...	
reales	complejos
Soluciones[ecuación]	SolucionesC[ecuación]
Factoriza[expresión]	FactorC[expresión]

Utilizando la vista grafica se representan los complejos en el plano.



Sucesiones, progresiones, combinatoria

Calculator interface showing a sequence definition and evaluation:

- 1 $b(n) := n^2 + 2n + 1$
- $b(n) := n^2 + 2n + 1$
- 2 $b(26)$
- 729
- 3 $\text{Suma}[b(n), n, 1, 26]$
- 6929
- 4 Factoriza: $n \frac{n+1}{2}$

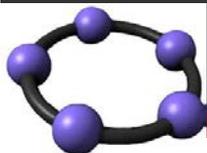
➔ Calcular el valor de la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Calculator interface showing a sum calculation and a graphical slider:

- 1 $\text{Suma}[(1/a)^n, n, 1, \infty]$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- Vista Gráfica: $a = 3$

Suma[expresión, variable, valor inicial, valor final]

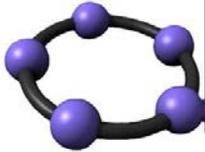


Trigonometría

► Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$5 \cos(\pi/4) + 2 \operatorname{sen}(\pi/3) - \sec(30^\circ)$
○	$\rightarrow \frac{1}{6} (2\sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 15)$
2	$\operatorname{sen}(A/2)$
	$\rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} A\right)$
3	TrigDesarrolla[sen(a+b)]
	$\rightarrow \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \operatorname{sen}(b)$
4	TrigDesarrolla[sen(2A)]
	$\rightarrow 2 \cos(A) \operatorname{sen}(A)$
5	$\operatorname{sen}(2x) = 1/2$
○	Resuelve: $\left\{ x = k_1 \pi + \frac{1}{12} \pi, x = k_1 \pi + \frac{5}{12} \pi \right\}$

Trigonometría		
Sin(), sen();	Cos();	Tan();
Sec();	Cosec();	Cotan() cotg(x)
Asin();	acos() ...	Arcoseno(), ...
Sinh(), sen(h);	cos(h)	Seno hiperbólico(), ...
Alt + o , °		Grados sexagesimales
TrigDesarrolla [sen(a+b)] = sen(a) cos(b) + cos(a) sen(b)		

Ejercicios



- ➔ Comprobar que $x=2+3i$ es raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$
- ➔ Si m y n son dos números naturales consecutivos, entonces la siguiente expresión es un cuadrado perfecto.

$$m^2 + n^2 + (mn)^2$$

1	$\rightarrow P(x) := 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$
2	$P(1+i)$ $\rightarrow 0$
3	$2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$ Sustituye, $x=1+i$: 0
4	$m^2 + n^2 + (mn)^2$ $\rightarrow m^2 n^2 + m^2 + n^2$
5	$m^2 n^2 + m^2 + n^2$ Sustituye, $m=n+1$: $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$
6	$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ Factoriza: $(n^2 + n + 1)^2$

Vectores



Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$u := \text{Vector}[(1,4)]$ → $u := (1,4)$
2	$v := \text{Vector}[(3,-1)]$ → $v := (3,-1)$
3	$2u - 3v$ → $(-7, 11)$
4	$u \cdot v$ → -1
5	$\text{abs}(u)$ → $\sqrt{17}$
6	$\text{Ángulo}[u,v]$ → 265.6°

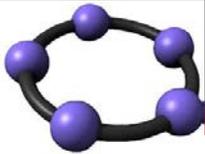
Vectores	
$u := [(a,b)]$	$u := [(a,b),(c,d)]$
Módulo	$\text{abs}(u)$
Producto escalar	$u \cdot v ; u \cdot v$
Producto vectorial	$u \otimes v$
Ángulo	$\text{ángulo}[u,v]$

Ejercicio vectores.

- **Dados los vectores $u=(1,4)$ y $v=(2,k)$, determina k para que:**
- **a) u y v sean perpendiculares.**
 - **b) Módulo de $v = 5$**
 - **c) Calcular un vector unitario en la dirección de u y sentido contrario.**

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$u:=\text{Vector}[(1,4)]$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow u := (1, 4)$
2	$v:=\text{Vector}[(2,k)]$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow v := (2, k)$
3	$u \cdot v = 0$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\left\{ k = -\frac{1}{2} \right\}$
4	$\text{abs}(v)=5$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\left\{ k = -\sqrt{21}, k = \sqrt{21} \right\}$
5	$-\frac{u}{\text{abs}(u)}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left(-\frac{\sqrt{17}}{17}, -4 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$

Matrices



► Cálculo Simbólico (CAS)

1
○ $A := \{\{1,2,3\}, \{4,-1,5\}, \{6,-3,0\}\}$
→ $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2
○ $B := \{\{3,2,1\}, \{4,5,6\}, \{3,4,-2\}\}$
→ $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

3
○ AB
→ $\begin{pmatrix} 20 & 24 & 7 \\ 23 & 23 & -12 \\ 6 & -3 & -12 \end{pmatrix}$

4
○ A^3
→ $\begin{pmatrix} 69 & 24 & 36 \\ 48 & 45 & 60 \\ 72 & -36 & 57 \end{pmatrix}$

Matrices		
$A := \{\{1,2,3\}, \{4,5,-2\}, \{4,-1,5\}\}$		
$A+B$	$A*B = A B$	A^n
$\text{Identidad}[n]$	→ Matriz identidad de orden n	
$\text{Traspone}[A]$		
$\text{Determinante}[A]$		
$\text{RangoMatriz}[A]$		
$\text{Inversa}[A], A^{(-1)}$		
$\text{EscalonadaReducida}[A]$		

- Hoja de cálculo
- Resolución de sistemas lineales

Sistemas lineales mediante matrices

Resuelve[{{2x+y-z=11,x-3y=-20,4x+2y+5z=8}}

→ {{x = 1, y = 7, z = -2}}

A

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

EscalonadaReducida[B]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

RangoMatriz[C]

→ 2

RangoMatriz[D]

→ 2

Sistema compatible indeterminado

	A	B	C	D
1	2	1	-1	11
2	1	-3	0	-20
3	4	2	5	8
4				
5	1	-9	5	33
6	1	3	-1	-9
7	1	-1	1	5
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				

➔ Pueden escribirse las matrices utilizando la Hoja de Cálculo.

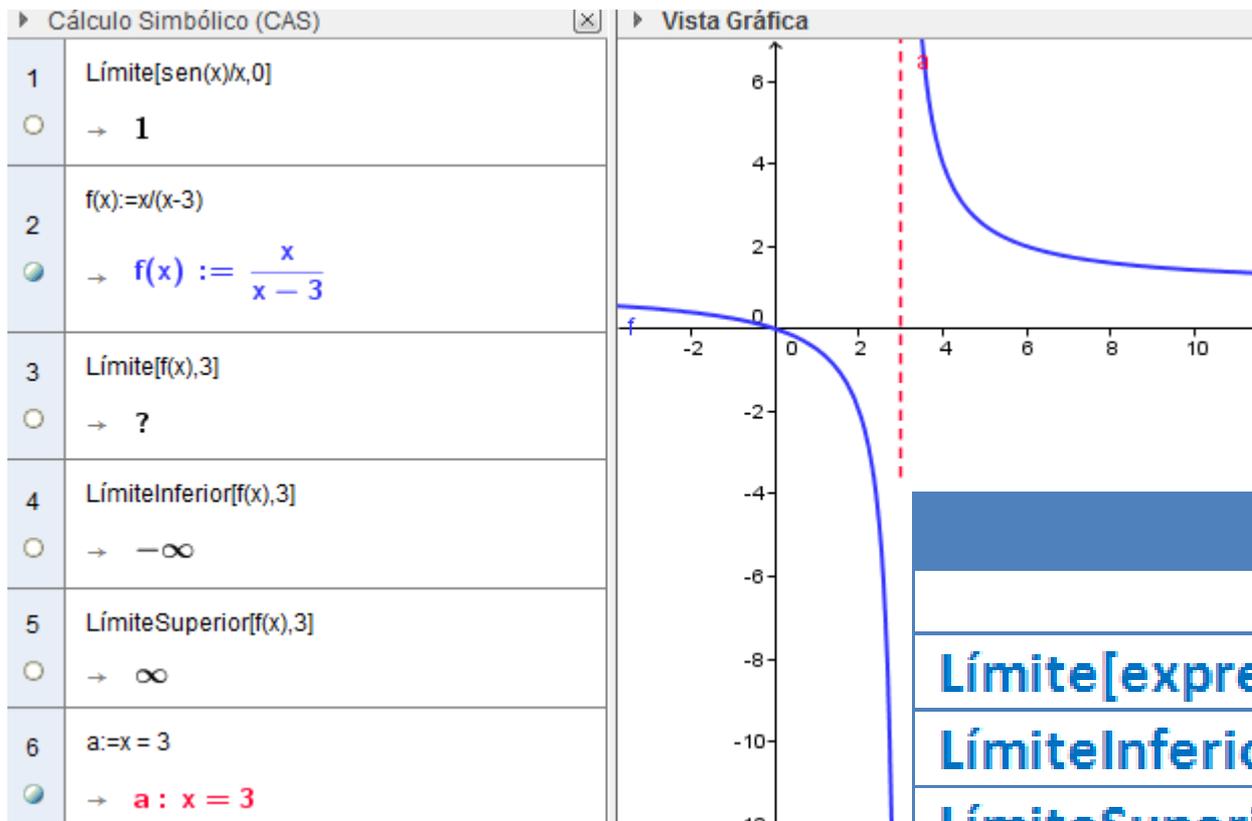
➔ Seleccionar las celdas que forman los elementos de la matriz.

➔ Utiliza herramienta crear matriz de la barra herramientas de hoja de calculo.

El comando EscalonadaReducida[A] resuelve por Gauss el sistema.



Límites

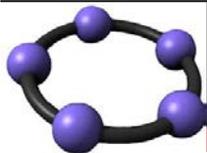


Límites

Límite[expresión, punto]

LímiteInferior[expresión,punto]

LímiteSuperior[expresión,punto]



Derivadas

Calculator interface showing symbolic calculations:

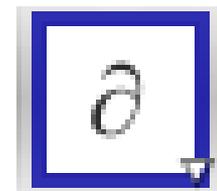
1 $x^2 \ln(x+1)$
Derivada: $2x \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$

2 Derivada[$e^{-x^2/2}$]
 $\rightarrow -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$

3 $f(x) := \sin(x)^2$
 $f(x) := \sin^2(x)$

4 $f(x)$
 $\rightarrow 2 \cos(x) \sin(x)$

5 $f'(x)$
 $\rightarrow 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)$

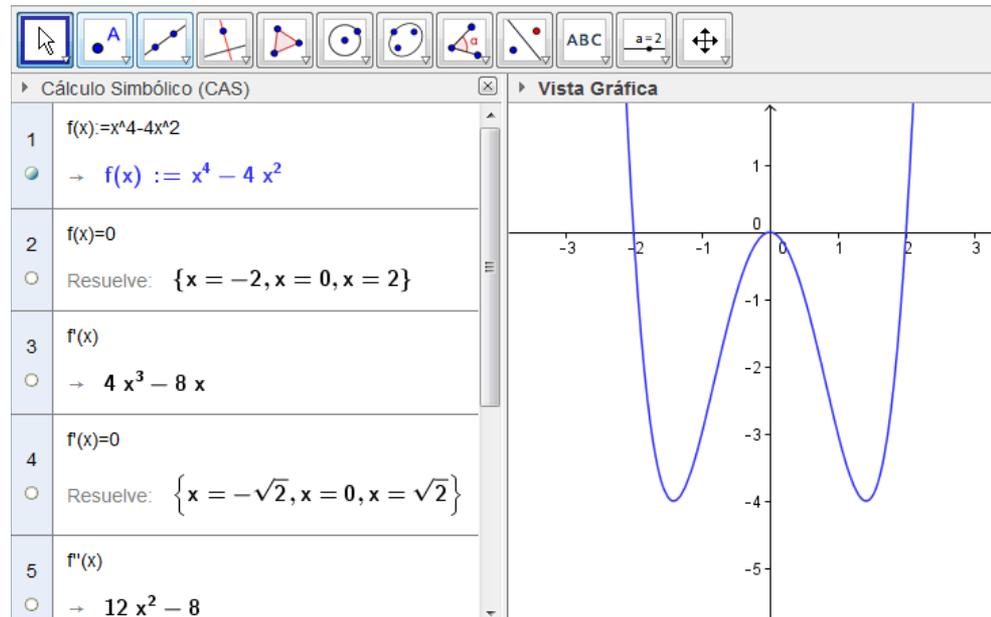


Derivadas		
$f(x) :=$	$f'(x)$	$f''(x)$
Derivada[expresión]		
Derivada[expresión,variable]		
Derivada[expresión,variable,orden]		
DerivadaImplicita[f(x,y)]		
DerivadaImplicita[f(x,y),v dep.,v indep.]		
PolinomioTaylor[función,variable,punto,orden]		



Extremos, puntos de inflexión,...

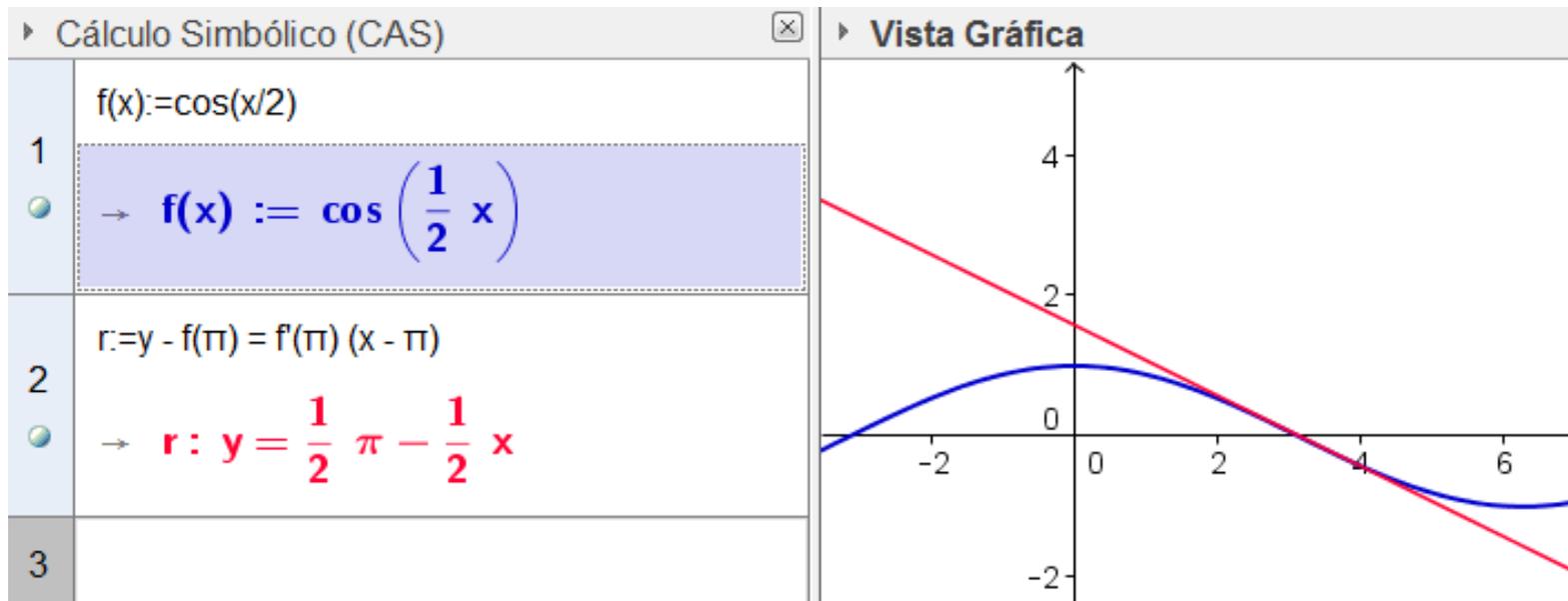
- Dada la $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determina:
- Puntos de corte con ejes.
 - Extremos y puntos de inflexión.

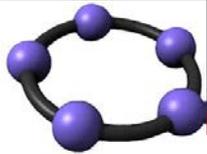




Recta tangente

➔ Determinar la recta tangente a $y = \cos(x/2)$ en $x = \pi$.





Polinomio de Taylor

Cálculo Simbólico (CAS)

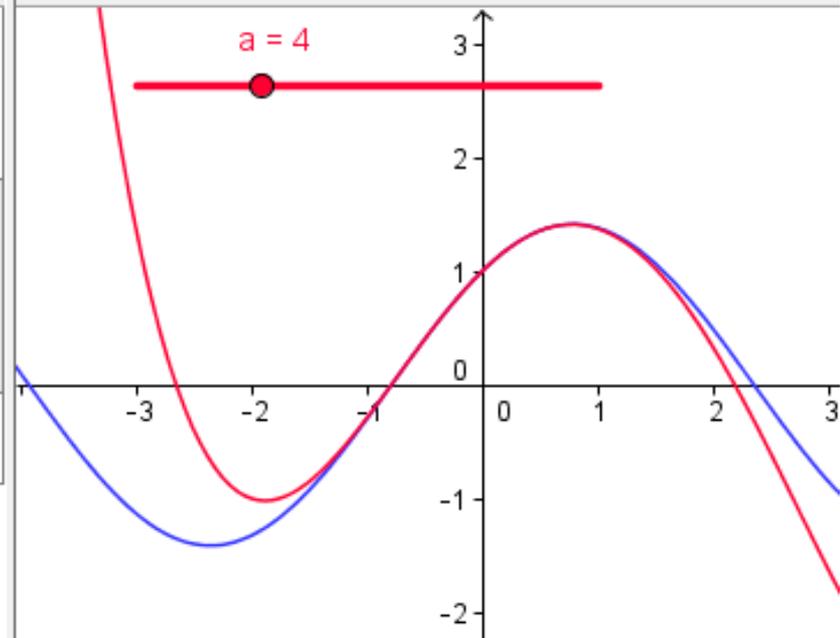
$$f(x) := \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$$

$$\rightarrow f(x) := \cos(x) + \text{sen}(x)$$

$$g(x) := \text{PolinomioTaylor}[f(x), 0, a]$$

$$\rightarrow g(x) := \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x + \dots$$

Vista Gráfica

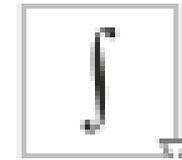




Integrales

Calculator interface showing symbolic calculations:

- 1 x^2-3x+2
Integral: $\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2 x + c_1$
- 2 $\text{Integral}[1/(2x+3)]$
 $\rightarrow \frac{1}{2} \ln(|2 x + 3|) + c_4$
- 3 $\text{Integral}[e^x, 0, 1]$
 $\rightarrow e - 1$
- 4 $x^2-4x=2x-5$
Resuelve: $\{x = 1, x = 5\}$
- 5 $\text{IntegralEntre}[x^2-4x, 2x-5, 1, 5]$
 $\rightarrow -\frac{32}{3}$



Cálculo Integral

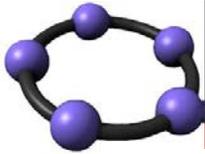
$\text{Integral}[f(x)]$

$\text{Integral}[f(x), a, b]$

$\text{IntegralEntre}[f(x), g(x), a, b]$

$\text{FraccionesParciales}[\text{expresión}]$

Ufff ... por fin se acabó.



➔ Muchas Gracias.



josemarranz@gmail.com